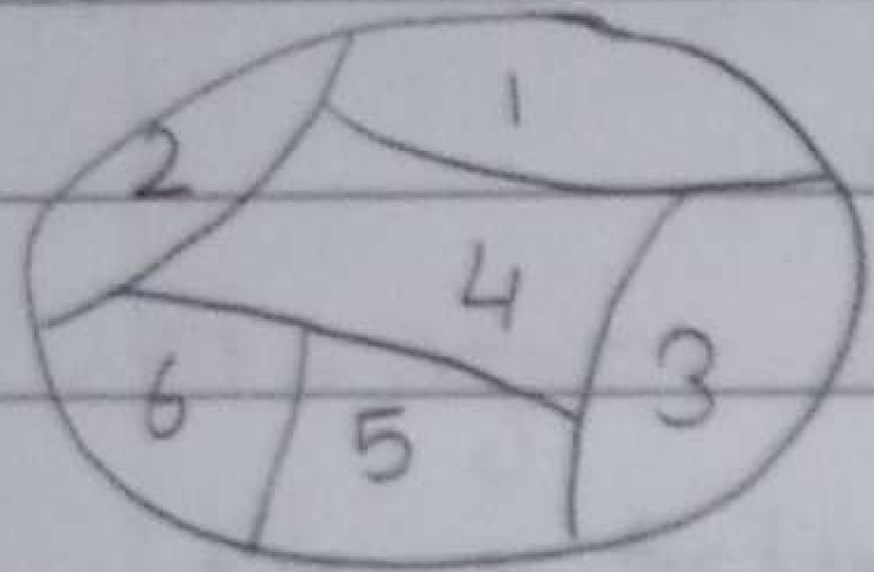


المحاضرة (3).

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$Z = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{n-1}$

$\bar{0}$: هو مجموعة جميع الأعداد الصحيحة التي قسمتها على n ثابت (صفر).

لتكن n عنصر ثابت من Z ونعرف على Z العلاقة $\sim_n$ كما يلي:

$\forall x, y \in Z : x \sim y \Leftrightarrow$ $y-x$ يقبل القسمة على n

$y-0$ يقبل القسمة على n

لقد وجدنا سابقاً أن: $\bar{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{n-1}$

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ في Z بالنسبة لعلاقة التكافؤ $\sim_n$ بالرمز Z_n أي أن:

$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

فنلاحظ أن العددين الصحيحين x، y ينتميان إلى نفس الصف عندما وعندما فقط يكون باقي قسمة x على n مساوياً لباقي قسمة y على n

لذلك تدعى المجموعة Z_n مجموعة البواقي

تذكر خوارزمية اقليدس

* مثال عددي *

لنأخذ $n = 6$

$\forall x, y \in Z : x \sim_6 y \Leftrightarrow$ $y-x$ يقبل القسمة 6 ← أي قسمة صحيحة

فنجد بسهولة أن Z تتجزأ إلى ستة صفوف تكافؤ وهي:

$\bar{0} = \{0, \mp 6, \mp 12, \mp 18 ...\} = \{6k ; k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{1} = \{\mp 1, \mp 13, \mp 19, ...\}$

$\bar{2} = \{\mp 2, \mp 8, ...\}$

$\vdots$

$\bar{5} = \{\mp 5, \mp 11, ...\}$

زمرة البواقي:

نعرف على $Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$ حيث n عدد صحيح ثابت > 1

* قانون التشكيل الداخلي $\oplus$ كما يلي:

$\oplus : Z_n \times Z_n \to Z_n$ $\quad n = 6$

$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$ $\quad$ مثال: $7 \oplus 6 = \overline{13} = \frac{13}{6}$

فنجد بسهولة أن قانون التشكيل $\oplus$ على Z_n

① تجميعي:

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Z_n : (\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$

لأن الجمع الجديد $\oplus$ معرف بدلالة الجمع على الأعداد الصحيحة الذي هو تجميعي

② يوجد عنصر حيادي في Z_n بالنسبة لقانون التشكيل الداخلي $\oplus$ وهو $\bar{0}$ لأن:

$\forall \bar{x} \in Z_n : \bar{x} \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{x} = \bar{x}$

لأن: $\bar{x} \oplus \bar{0} = \overline{x+0} = \bar{x}$ وأيضا $\bar{0} \oplus \bar{x} = \overline{0+x} = \bar{x}$ [الجمع تبديلي]

③ لكل عنصر $\bar{x}$ من Z_n يوجد عنصر نظير $(\overline{-x})$ بالنسبة للقانون $\oplus$

$\bar{x} \oplus (\overline{-x}) = (\overline{-x}) \oplus \bar{x} = \bar{0}$

لأن: $\bar{x} \oplus (\overline{-x}) = \overline{x + (-x)} = \bar{0}$

$(\overline{-x}) \oplus \bar{x} = \overline{(-x) + x} = \bar{0}$

اذن: $(Z_n, \oplus)$ تشكل زمرة تدعى زمرة البواقي.

⑦ زمرة التباديل S_n:

نأخذ مجموعة جميع التقابلات S_n على المجموعة $X = \{1, 2, ..., n\}$ والتي عددها $(n!)$

ولنعرف على S_n قانون التشكيل الداخلي $(\circ)$ الذي هو تركيب التطبيقات

$o : S_n \times S_n \to S_n$

$(f, g) \mapsto g o f$

نجد بسهولة أن قانون تركيب التقابلات

1- تجميعي: $\forall f, g, h \in S_n : (f o g) o h = f o (g o h)$

2- يوجد عنصر حيادي في S_n بالنسبة لقانون تركيب التقابلات وهو التقابل المطابق

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{منطلق} \\ \leftarrow \text{مستقر} \end{matrix}$$

لأن: $\forall g = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$

$$g o e = e o g$$

$g o e$ b_1: $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

$e o g$ b_2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

3- يوجد لكل عنصر $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ مقلوب في S_n وهو يتم الحصول عليه

بأن نجعل السطر الثاني هو سطر أول والسطر الأول هو سطر ثاني ثم نبادل بين الأعمدة (التي لا تؤثر بشيء على التقابل) فنحصل على $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

وبذلك نصبح (S_n, o) زمرة.

R } مجموعة يلي
Q } م اتعامل ها

8 زمرة المصفوفات:

نرمز لمجموعة جميع المصفوفات المربعة من القياس $n \times n$ والمأخوذة عناصرها من حقل F والتي محين كل منها مختلف عن الصفر بالرمز $GL(n,F)$ ولنعرف عليها قانون الضرب العادي (الضرب المصفوفي نفسه) فنجد بسهولة أنه $(GL(n,F),\cdot)$ زمرة.

1. لأن ضرب المصفوفات تجميعي.
2. يوجد عنصر حيادي في البنية $GL(n,F)$ وهو $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
3. لكل عنصر من $GL(n,F)$ مقلوب. (المصفوفة المساعدة)